Lemmata ad theoriam parallelarum stabiliendam idonea,

quæ

Venia Ampl. Facult. Philos.

publico examini,

Præside

Mag. CAROL. JOH. D:s HILL,

Math. Prof. Reg. et Ord.,

lauream ambiens submittit

BENED. NICOL. AD. LINDWALL,

Philos. Cand. Smolandus.

In Lyceo Carol. die xv Jun. MDCCCXLIV.

P. IV.

Lundæ,

typis Berlingianis,

MDCCCXLIV.

dam contulerunt, haud infitias ibimus, nos aliquas propositiones aliis debere, quorum tamen scripta perpauca ad manus nobis fuerunt, et quidem unam D:no Le Gendre, unam D:no Hoffmann, unamque D:no Servois, quarum tamen nonnullas nostro modo prævie demonstravimus. Interdum vero aliorum in modum insanire liceat!

Primum igitur, præter Euclidæas propositiones 1—28, et 31, quibusdam præmissis Lemmatibus auxiliariis, num axioma dictum immediate demonstretur, dispiciamus.

A. Lemmata.

A. 1. Probl. Dato angulo (α) externo cum latere adjacente (b) Triangulum delineare, in quo alter internus duplo minor sit (Fig. 1.) ($<\frac{1}{2}\alpha$).

Sint $BAC=\alpha$ et $AC=b$ data, producaturque BA in D, ut $AD=AC$ sit, deindeque in E, ut $DE=$ ductæ CD æqualis fiat, ductoque CE, angulum E duplo minorem dato ($<\frac{1}{2}\alpha$) prædicamus. Quoniam enim isoscelia triangula fecimus, erit (1: 5) angulus $ACD=ADC>E$ interno (1: 16) et $DCE=E$, ideoque totus $ACE>2.E$. Sed (1: 16) externus BAC seu $\alpha>$ interno ACE, ergo $\alpha>2.E$ erit. *Q. E. F.*

Cor. 1. Quoniam $DE=CD<CA+AD=2AC$, erit $AE=AD+DE<3.AC$, quare si mox $AE'=3AC$ ($>AE$) fecissemus, foret ang. $E'<E<\frac{1}{2}.\alpha$.

Cor. 2. Angulus internus C lateri dato adjacens etiam dimidio minor dato externo efficiatur. Sit enim $AD=\frac{1}{3}.AC$, ideoque $AC=3.AD$, eritque (Cor. 1) ang. $ACD<\frac{1}{2}\alpha$.

Cor. 3. Dato angulo α externo latereque b adjuncto, construatur Triangulum, in quo angulus internus, ipsi b oppositus, dato (δ) angulo minor sit.

Primo enim ang. α iteratis vicibus dimidiari potest, donec tandem sit $\alpha_{\nu}=$

$= \frac{\alpha}{2^n} < \delta$, deindeque dicto modo construantur anguli $\varepsilon < \frac{1}{2}\alpha$, $\varepsilon' < \frac{1}{2}\varepsilon$, $\varepsilon'' < \frac{1}{2}\varepsilon'$ etc. hocque toties iteretur, quoties α dimidiandus erat, fietque ultimus ang. $\varepsilon^{\prime v} < \alpha_v < \delta$.

Hæc vero constructio ejusmodi esse potest, ut $AE = 3.AC$, $EE' = 3.CE$ etc. efficiantur, vel etiam tantum $AD > AC$, $DE > DC$ etc.; si enim propositionem (postmodum rigorose demonstrandam), angulum externum internis junctis haud esse minorem, admiserimus; sufficiet AE vel paululum majorem ipso AC fecisse.

Sit enim $AD = AC$, atque AE utcunque major ipso AC, eritque ang. externus α seu $BAC = > 2ADC$, (quia $ADC = ACD$), ideoque quia $ADC > AEC$ vel E, mox erit $\alpha > 2.E$. Dummodo igitur $AE > AC$ fuerit, fiet $\alpha > 2E$, ideoque si ulterius $EE' > EC$ fecerimus, erit ang. $E > 2E'$, ideoque $\alpha > 4.E'$; e. s. p. — Cito igitur ita ad angulum ε^v dato minorem perveniemus.

Cor. 4. Hinc quidem patet super data basi et sub dato angulo huic adjacenti construi posse triangula, quorum reliqui anguli tum basi oppositi tum adjacentes dato angulo minus differant. Sufficit enim primo triangulum CEA super data basi AC et sub dato angulo CAD per Cor. 3. construxisse, cujus angulus basi oppositus E dato δ minor sit, deinde alterum $AE'C$, majoribus gaudens lateribus, quo ang. $E' < E < \delta$ fit, ideoque $E - E' < \delta$. Simul vero adjacentium $E'CA$ et ECA differentia $E'CE$ aperte $< AEC < \delta$ fit.

Cor. 5. Per punctum datum C ad datam lineam BAD angulum quemcunque datum D constituere licet.

Sit enim (quod licet, contiguum in obtusi locum sufficiendo) D acutus seu $< R$, sed $> \frac{1}{2^r} \cdot R$, constituaturque ad AC per C angulus E seu $AEC < \frac{1}{2^r} \cdot R$, ut sit $R > D > E$; ducta vero CD utcunque inter AC et CE, erit etiam ang. ADC inter R et E contentus: movendo igitur DC inter suos limites, aliquando $ADC = D$ evadet.

Schol. Interdum accidere potest, ut propositio de triangulis congruentibus, quæ in elementorum libro 1:o desideratur, hæc in usum vocanda sit:

Prop. Si duo triangula duo habuerint latera æqualia, singula singulis, unumque angulum æquali lateri oppositum communem (l. æqualem), alterum alteri vel congruens erit, vel alii conveniet, eisdem gaudenti lateribus atque angulo, sed

altero angulo opposito illius contiguo æquali. Cor. Si duo triangula habuerint duo latera æqualia, unumque angulum oppositum æqualem, alter vero in alterutro rectus fuerit, illa omni modo sibi convenient. Demonstratio perfacilis.

A. 2. Theor. Si super eadem recta hypothenusa duo triangula rectangula constituta fuerint; majori angulo alterius majus latus, ac minori alterius, opponetur.
(Fig. 2)

Sint enim ABC et DBC rectangula ad A et D, sibique superposita, et $\wedge\ ABC > DBC$, ideoque linea DB inter AB et BC sita; tum apex D vel intra triangulum ABC, ut d, vel in latere AC, ut δ, vel extra, ut D, inveniatur. Quia vero $\wedge\ BdC > B\delta C > A$ (1: 17 et 21), et $A = R = \text{recto} = D$, anguli ad d et δ haud recti sunt; quare D necessario extra ABC situm sit, ideoque $AC > \delta C > DC$ (1: 19), quia angulus D, ut rectus, reliquorum utrumque necessario superat (1: 17).

Cor. 1. Vice versa igitur, si in triangulis rectangulis communi vel æquali hypothenusa gaudentibus catheta inæqualia fuerint, ut $AC > DC$, similiter anguli his oppositi ordinatim inæquales erunt, nempe $ABC > DBC$.

Si enim $ABC = DBC$ esset, foret (1: 26) $AC = DC$; et si $ABC < DBC$, foret ex hoc th. $AC < DC$.

Cor. 2. Simul vero ex ipsa theorematis demonstratione patet, in ejusmodi triangulis angulos inæqualibus lateribus ($AC > DC$) adjacentes perturbatim inæquales fore, nempe $ACB < DCB$.

Cor. 3. Si igitur in Triangulis rectangulis communi hypothenusa gaudentibus unus angulus ABC uno DBC major fuerit, alter ACB altero DCB minor erit.

Cor. 4. (Fig. 3.) Si in triangulo ad A rectangulo, cathetum CA in D per transversalem BD bisecatur, angulus B hac inæqualiter secabitur, ut sit $CBD < DBA$.

Duc enim DE normaliter in CB, eruntque DEB et DAB triangula rectangula communi gaudentia hypothenusa BD, in quibus cathetum $DE < DA$, quia $DA = CD > DE$ (1: 17 et 19); ideoque ex Cor. 1. $\wedge\ DBE < DBA$.

Cor. 5. Est itaque angulus CBD minor dimidio ipsius CBA, totusque CBA minor duplo DBA, si CD dimidia est AC et A rectus.

Cor. 6. Si vero angulus CBA per BD bisecatur, fit $CD > DA$, quia tum Triangula DAB et DEB (per 1: 26) congruentia sunt, si $\wedge\ E = A = R$, ideoque $CD > (ED =) DA$.

Cor. 7. Universim existente CBA triangulo quocunque, cujus angulus B per BD bisecatur, major basis pars CD majori lateri CB adjacet.

Sit enim $BE = BA$, fietque (1: 4) $ED = DA$ et ang. $BED = A > C$, quia $BC > BA$. Est vero ang. $C < BDA = BDE < DEC$, (1: 16) ideoque $CD > ED = DA$.

A. 3. Theor. Si crura $AB = BC$ anguli ejusdem ABC ($= B$) sibi (Fig. 4.) æqualia tantaque accepta fuerint, ut distantia AD (in BC normalis) puncti A unius ab altero major fuerit data certa quantitate 2δ, erit illius ab anguli bisectore BE distantia AE hac dimidia δ major.

Quoniam enim ang. $ABE = CBE$, et $AB = BC$, erit $AE = EC$ atque ang. E rectus (1: 4); quare (1: 19) $2 . AE = AC > AD >= 2\delta$, ideoque $AE > \delta$.

Cor. 1. Si angulus B fuerit rectus, ideoque $2\delta = AD = AB$, erit in semirecto ($= \frac{1}{2}R$), $AE > \delta$, cum $AB = 2\delta$.

Cor. 2. Si igitur porro B semirectus fuerit et $AB = 4\delta$, erit $AD > 2\delta$ (Cor. 1), et (Theor.) $AE > \delta$ in angulo $ABE = \frac{1}{4} \cdot R$.

Cor. 3. Rursum si $B = \frac{1}{4}$ R fuerit, et $AB = 8\delta$, erit similiter (Cor. 2) $AD > 2\delta$ et $AE > \delta$.

Cor. 4. Continuando eundem in modum, facile inveniemus $AD > 2\delta$ et $AE > \delta$, si angulus $B = ABC = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot R$ et $ABE = \frac{1}{2} \cdot R$ atque $AB = 2^n . \delta$ fuerit.

A. 4. Probl. In dato quocunque angulo acuto *ABC* alterutri cruri (Fig. 4.) normalem (*AD*) aptare data linea δ majorem.

Sit datus ang. $ABC = \alpha$, eoque minorem inveniamus continuo bisecando recti partem $\frac{1}{2^n} \cdot R = EBA (< ABC)$, capiamusque $BA = 2^n \delta$, demittamusque *AD* in *BC* normalem; eritque (Cor. præc.) (in *BE* normalis) $AE > \delta$. Sed ang. $ABD > ABE$, ideoque (Lem. 2.) $AD > AE$, atque igitur $AD > \delta$. *Q. E. F.*

Aliter. (Fig. 1.) Sit $AC = \delta$ normalis in *EDB*, et constituatur (per *A* 1. Cor. 3), super *AC* ad *DB* angulus *ANC* minor dato α. Quo facto ducta linea quacunque *CE* inter *AC* et *CN*, erit (1:16) ang. $CAB > AEC > ANC$, sicuti Rectus $> \alpha > ANC$; Ergo fieri potest, ut jam ang. $AEC = \alpha$ sit. Sin minus, unum anguli α crus super *ED* applicemus ejusque apicem ut $AEC = \alpha$ a *D* versus *N* promoveamus, donec crus alterum *CE'* in *C* cadat, quod certe contingat, priusquam apex in *N* pervenerit, quia $\alpha > ANC$ est. Quo facto in ang. $\alpha = AE'C$ aptata erit normalis CA = datæ δ æqualis, et unaquæque extra hanc major δ erit. *Q. E. F.*

B. Axiomatis dubii casus quidam probati.

I) A puncto dato cruris anguli, qui angulo æquilateri (multo) minor est, linea normalis educta alterum crus contingit. (Fig. 5.)

Sit *EAG* angulus datus (multo) minor angulo *BAD* trianguli cujusdam æquilateri, atque *D* punctum in *AG* datum. Capiatur *DC* triplex productæ *AD*, ex puncto *C* demittatur perpendicularis *CB* in *AB*. Faciamus $AF = AC$, eruntque *AF*, *AC* latera æqualia angulum *BAD* trianguli æquilateri comprehendentia ideoque *FAC* ejusmodi triangulum, quare $AB = BF = \frac{1}{2} . AC = 2 . AD$, quia $FC = AC$ et ang. ad *B* rectus, (1: 26), et $AC = AD + 3 . AD = 4 . AD$. Quæ cum ita sint, faciamus

$AG = AB = 2 . AD$, eritque $AD = DG$, atque $AG = GC$, quia $AG + GC = AC = AF = 2 . AB = 2 . AG$; quare jam facile tibi per 1: 4 vel 1: 8 persuadeas, angulos ad G æquales ideoque rectos esse. Jam vero per D (vel aliud quodvis punctum inter A et G) erigamus DB normalem in AG, quæ necessario ABF ideoque rectam quamcumque AEH inter AF et AG per A ductam secat, cum ipsi FG parallela sit. Jam vero, quia ang. EAD minor est ang. BAD trianguli æquilateri, EA inter BA et AD necessario cadit, ideoque e triangulo BAD egrediens latus BD, in AG normalis alicubi (ut in E) ipsam AEH tangat. *Q. E. D.*

Cor. Speciatim igitur, si EAD fuerit dimidius quadrati (seu acutus trianguli rectanguli æquicruris) angulus, qui ex def. 30. semirectus foret *), normalis e quocunque puncto ad unius cruris AD alteri AE alicubi occurret. Id quod et ita ostendatur. Faciamus $DG = AD$, demittamusque normalem GE in AE, jungamusque ED, quam normalem in AD dicimus. Quoniam enim AEG est triangulum ad E rectangulum atque EAD angulus ejusmodi trianguli rectanguli æquicruris acutus, est $EG = AE$, ideoque (1: 8) $\overline{EDA} \cong \overline{EDG}$, quare anguli ad D recti sunt; ideoque ED normalis in AG e D erecta, ipsi AEH occurit.

II) Alium latius patentem casum addamus. Contendimus scil. Euclidæum axioma valere, (cum anguli interni simul rectum dimidio illorum alterutro non superaverint, seu alterius contiguo minores fuerint), cum internorum alter complemento dimidii alterius minor fuerit. (Anguli vero acuti complementum eum dicimus, qui cum illo, in triangulo rectangulo adest).

Sint enim EAC et $AC\delta$ duo ejusmodi anguli interni, hujusque dimidius ACB, cujus complementum CAB sit, ideoque ang. ABC rectus.

---

*) Hunc angulum EAD angulo BAD triang. æquilateris minorem fore inde patet, quod ang. $BAD = ABG = 2 . ABD$ sit, ideoque $BD > AD = DE$.

altero angulo opposito illius contiguo æquali. Cor. Si duo triangula habuerint duo latera æqualia, unumque angulum oppositum æqualem, alter vero in alterutro rectus fuerit, illa omni modo sibi convenient. Demonstratio perfacilis.

A. 2. Theor. Si super eadem recta hypothenusa duo triangula rectangula constituta fuerint; majori angulo alterius majus latus, ac minori alterius, opponetur.
(Fig. 2)

Sint enim *ABC* et *DBC* rectangula ad *A* et *D*, sibique superposita, et $\wedge$ $ABC > DBC$, ideoque linea *DB* inter *AB* et *BC* sita; tum apex *D* vel intra triangulum *ABC*, ut *d*, vel in latere *AC*, ut δ, vel extra, ut *D*, inveniatur. Quia vero $\wedge$ $BdC > B\delta C > A$ (1: 17 et 21), et $A = R =$ recto $= D$, anguli ad *d* et δ haud recti sunt; quare *D* necessario extra *ABC* situm sit, ideoque $AC > \delta C > DC$ (1: 19), quia angulus *D*, ut rectus, reliquorum utrumque necessario superat (1: 17).

Cor. 1. Vice versa igitur, si in triangulis rectangulis communi vel æquali hypothenusa gaudentibus catheta inæqualia fuerint, ut $AC > DC$, similiter anguli his oppositi ordinatim inæquales erunt, nempe $ABC > DBC$.

Si enim $ABC = DBC$ esset, foret (1: 26) $AC = DC$; et si $ABC < DBC$, foret ex hoc th. $AC < DC$.

Cor. 2. Simul vero ex ipsa theorematis demonstratione patet, in ejusmodi triangulis angulos inæqualibus lateribus ($AC > DC$) adjacentes perturbatim inæquales fore, nempe $ACB < DCB$.

Cor. 3. Si igitur in Triangulis rectangulis communi hypothenusa gaudentibus unus angulus *ABC* uno *DBC* major fuerit, alter *ACB* altero *DCB* minor erit.

Cor. 4. (Fig. 3.) Si in triangulo ad *A* rectangulo, cathetum *CA* in *D* per transversalem *BD* bisecatur, angulus *B* hac inæqualiter secabitur, ut sit $CBD < DBA$.

Duc enim *DE* normaliter in *CB*, eruntque *DEB* et *DAB* triangula rectangula communi gaudentia hypothenusa *BD*, in quibus cathetum $DE < DA$, quia $DA = CD > DE$ (1: 17 et 19); ideoque ex Cor. 1. $\wedge$ $DBE < DBA$.

Cor. 5. Est itaque angulus CBD minor dimidio ipsius CBA, totusque CBA minor duplo DBA, si CD dimidia est AC et A rectus.

Cor. 6. Si vero angulus CBA per BD bisecatur, fit $CD > DA$, quia tum Triangula DAB et DEB (per 1: 26) congruentia sunt, si $\wedge\ E = A = R$, ideoque $CD > (ED =) DA$.

Cor. 7. Universim existente CBA triangulo quocunque, cujus angulus B per BD bisecatur, major basis pars CD majori lateri CB adjacet.

Sit enim $BE = BA$, fietque (1: 4) $ED = DA$ et ang. $BED = A > C$, quia $BC > BA$. Est vero ang. $C < BDA = BDE < DEC$, (1: 16) ideoque $CD > ED = DA$.

A. 3. Theor. Si crura $AB = BC$ anguli ejusdem ABC $(= B)$ sibi (Fig. 4.) æqualia tantaque accepta fuerint, ut distantia AD (in BC normalis) puncti A unius ab altero major fuerit data certa quantitate 2δ, erit illius ab anguli bisectore BE distantia AE hac dimidia δ major.

Quoniam enim ang. $ABE = CBE$, et $AB = BC$, erit $AE = EC$ atque ang. E rectus (1: 4); quare (1: 19) $2 . AE = AC > AD >= 2\delta$, ideoque $AE > \delta$.

Cor. 1. Si angulus B fuerit rectus, ideoque $2\delta = AD = AB$, erit in semirecto $(= \frac{1}{2} R)$, $AE > \delta$, cum $AB = 2\delta$.

Cor. 2. Si igitur porro B semirectus fuerit et $AB = 4\delta$, erit $AD > 2\delta$ (Cor. 1), et (Theor.) $AE > \delta$ in angulo $ABE = \frac{1}{4} \cdot R$.

Cor. 3. Rursum si $B = \frac{1}{4}$ R fuerit, et $AB = 8\delta$, erit similiter (Cor. 2) $AD > 2\delta$ et $AE > \delta$.

Cor. 4. Continuando eundem in modum, facile inveniemus $AD > 2\delta$ et $AE > \delta$, si angulus $B = ABC = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot R$ et $ABE = \frac{1}{2} \cdot R$ atque $AB = 2^n . \delta$ fuerit.

A. 4. Probl. In dato quocunque angulo acuto *ABC* alterutri cruri (Fig. 4.) normalem (*AD*) aptare data linea δ majorem.

Sit datus ang. $ABC = \alpha$, eoque minorem inveniamus continuo bisecando recti partem $\frac{1}{2^n} \cdot R = EBA\,(< ABC)$, capiamusque $BA = 2^n \delta$, demittamusque *AD* in *BC* normalem; eritque (Cor. præc.) (in *BE* normalis) $AE > \delta$. Sed ang. $ABD > ABE$, ideoque (Lem. 2.) $AD > AE$, atque igitur $AD > \delta$. *Q. E. F.*

Aliter. (Fig. 1.) Sit $AC = \delta$ normalis in *EDB*, et constituatur (per *A* 1. Cor. 3), super *AC* ad *DB* angulus *ANC* minor dato α. Quo facto ducta linea quacunque *CE* inter *AC* et *CN*, erit (1:16) ang. $CAB > AEC > ANC$, sicuti Rectus $> \alpha > ANC$; Ergo fieri potest, ut jam ang. $AEC = \alpha$ sit. Sin minus, unum anguli α crus super *ED* applicemus ejusque apicem ut $AEC = \alpha$ a *D* versus *N* promoveamus, donec crus alterum *CE'* in *C* cadat, quod certe contingat, priusquam apex in *N* pervenerit, quia $\alpha > ANC$ est. Quo facto in ang. $\alpha = AE'C$ aptata erit normalis $CA =$ datæ δ æqualis, et unaquæque extra hanc major δ erit. *Q. E. F.*

B. Axiomatis dubii casus quidam probati.

I) A puncto dato cruris anguli, qui angulo æquilateri (multo) mi- (Fig. 5.) nor est, linea normalis educta alterum crus contingit.

Sit *EAG* angulus datus (multo) minor angulo *BAD* trianguli cujusdam æquilateri, atque *D* punctum in *AG* datum. Capiatur *DC* triplex productæ *AD*, ex puncto *C* demittatur perpendicularis *CB* in *AB*. Faciamus $AF = AC$, eruntque *AF*, *AC* latera æqualia angulum *BAD* trianguli æquilateri comprehendentia ideoque *FAC* ejusmodi triangulum, quare $AB = BF = \frac{1}{2} . AC = 2 . AD$, quia $FC = AC$ et ang. ad *B* rectus, (1: 26), et $AC = AD + 3 . AD = 4 . AD$. Quæ cum ita sint, faciamus

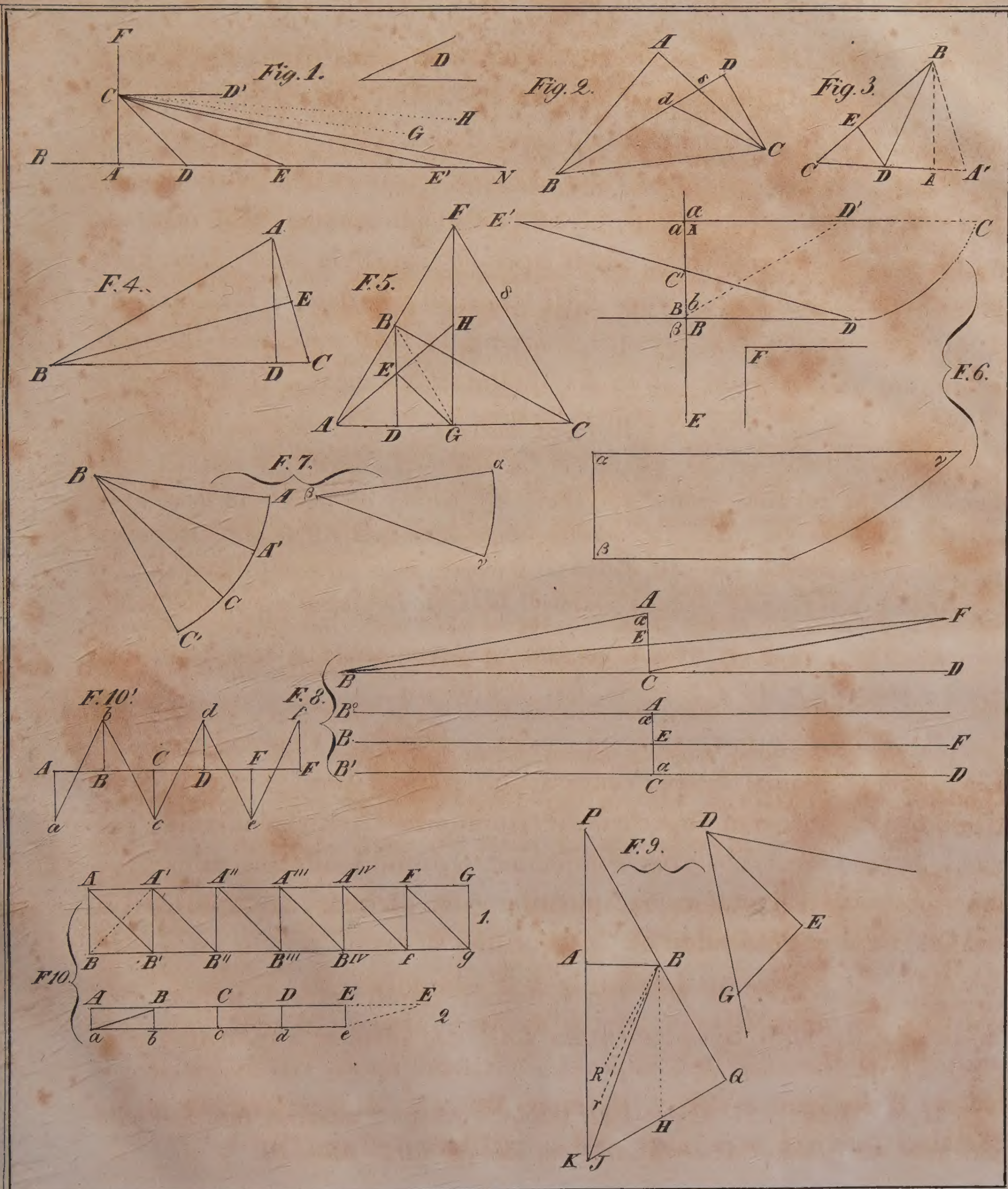
$AG = AB = 2 . AD$, eritque $AD = DG$, atque $AG = GC$, quia $AG + GC = AC = AF = 2 . AB = 2 . AG$; quare jam facile tibi per 1: 4 vel 1: 8 persuadeas, angulos ad G æquales ideoque rectos esse. Jam vero per D (vel aliud quodvis punctum inter A et G) erigamus DB normalem in AG, quæ necessario ABF ideoque rectam quamcumque AEH inter AF et AG per A ductam secat, cum ipsi FG parallela sit. Jam vero, quia ang. EAD minor est ang. BAD trianguli æquilateri, EA inter BA et AD necessario cadit, ideoque e triangulo BAD egrediens latus BD, in AG normalis alicubi (ut in E) ipsam AEH tangat. *Q. E. D.*

Cor. Speciatim igitur, si EAD fuerit dimidius quadrati (seu acutus trianguli rectanguli æquicruris) angulus, qui ex def. 30. semirectus foret *), normalis e quocunque puncto ad unius cruris AD alteri AE alicubi occurret. Id quod et ita ostendatur. Faciamus $DG = AD$, demittamusque normalem GE in AE, jungamusque ED, quam normalem in AD dicimus. Quoniam enim AEG est triangulum ad E rectangulum atque EAD angulus ejusmodi trianguli rectanguli æquicruris acutus, est $EG = AE$, ideoque (1: 8) $\widehat{EDA} \backsim \widehat{EDG}$, quare anguli ad D recti sunt; ideoque ED normalis in AG e D erecta, ipsi AEH occurit.

II) Alium latius patentem casum addamus. Contendimus scil. Euclidæum axioma valere, (cum anguli interni simul rectum dimidio illorum alterutro non superaverint, seu alterius contiguo minores fuerint), cum internorum alter complemento dimidii alterius minor fuerit. (Anguli vero acuti complementum eum dicimus, qui cum illo, in triangulo rectangulo adest).

Sint enim EAC et $AC\delta$ duo ejusmodi anguli interni, hujusque dimidius ACB, cujus complementum CAB sit, ideoque ang. ABC rectus.

*) Hunc angulum EAD angulo BAD triang. æquilateris minorem fore inde patet, quod ang. $BAD = ABG = 2 . ABD$ sit, ideoque $BD > AD = DE$.



Lith. af M Körner